Ciclóide, a Helena da geometria plana

Flank Bezerra
UFPB

18 de Agosto de 2019

Helena de Esparta

- Semideusa: filha de Zeus (pai dos deuses do olímpicos) e da rainha de Esparta Leda (esposa de Tíndaro);
- Esposa de Menelau (rei de Esparta e este é irmão de Agamenon);

Helena de Esparta

- Semideusa: filha de Zeus (pai dos deuses do olímpicos) e da rainha de Esparta Leda (esposa de Tíndaro);
- Esposa de Menelau (rei de Esparta e este é irmão de Agamenon);

A guerra de Tróia

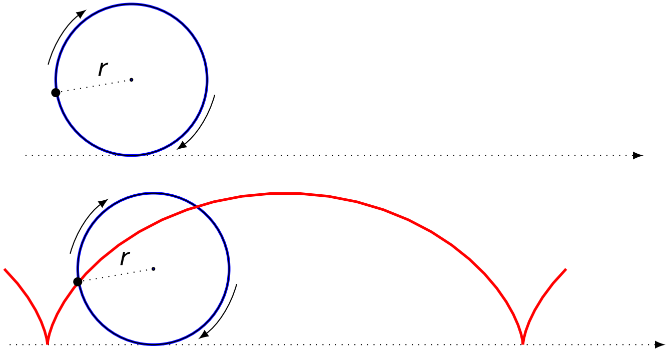
- Páris e Helena se conhecem e eles fogem para Tróia;
- Liderados por Agamenon, os espartanos travam uma batalha contra os troianos, estes possuem entre seus guerreiros Heitor (irmão de Páris) e Aquiles;
- Aquiles é semideus: filho da Tétis e de Peleu.

Ciclóide

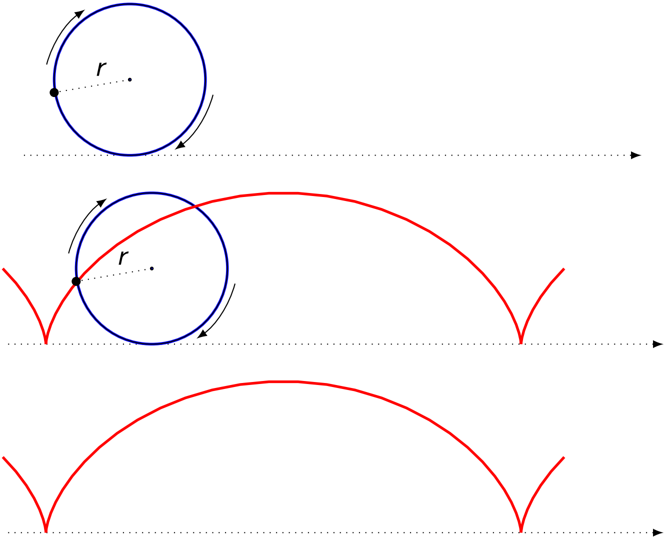
A ciclóide é definida como o lugar geométrico do deslocamento de um ponto fixo da circunferência de um círculo, quando este rola sem deslizar sobre uma reta de um mesmo plano que o círculo.

Ciclóide

Ciclóide



Ciclóide



Ciclóide reduzida

A ciclóide reduzida é definida como o lugar geométrico do deslocamento da extremidade de um segmento de comprimento $\ell > 0$, fixado, cuja outra extremidade coincide com o centro de um círculo de raio $r > \ell$, quando este rola sem deslizar sobre uma reta de um mesmo plano que o círculo.

Ciclóide reduzida

A ciclóide reduzida é definida como o lugar geométrico do deslocamento da extremidade de um segmento de comprimento $\ell > 0$, fixado, cuja outra extremidade coincide com o centro de um círculo de raio $r > \ell$, quando este rola sem deslizar sobre uma reta de um mesmo plano que o círculo.

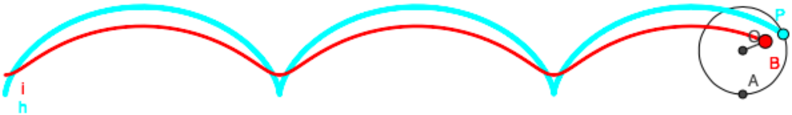


Figura: Ciclóide reduzida

Ciclóide alongada

A ciclóide alongada é definida como o lugar geométrico do deslocamento da extremidade de um segmento de comprimento $\ell > 0$, fixado, cuja outra extremidade coincide com o centro de um círculo de raio $r < \ell$, quando este rola sem deslizar sobre uma reta de um mesmo plano que o círculo.

Ciclóide alongada

A ciclóide alongada é definida como o lugar geométrico do deslocamento da extremidade de um segmento de comprimento $\ell > 0$, fixado, cuja outra extremidade coincide com o centro de um círculo de raio $r < \ell$, quando este rola sem deslizar sobre uma reta de um mesmo plano que o círculo.

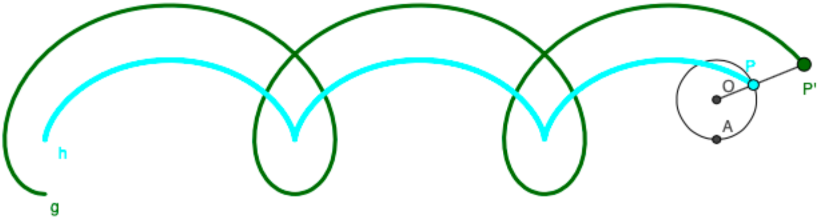


Figura: Ciclóide alongada

Ciclóide, ciclóide reduzida e ciclóide alongada

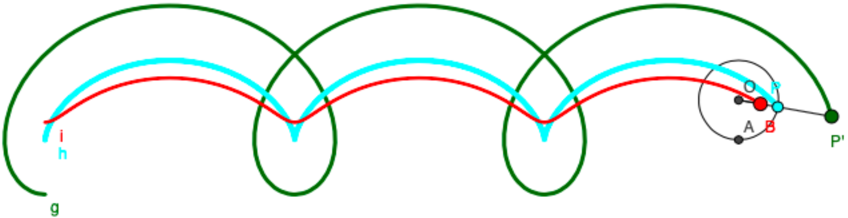


Figura: Ciclóides

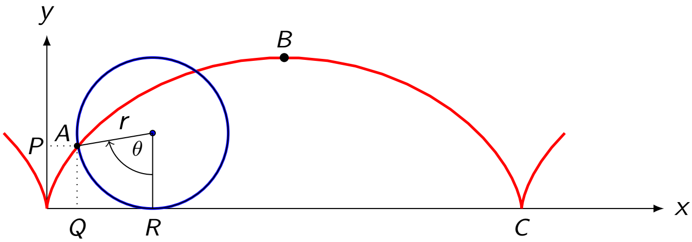
Notas

- Blaise Pascal (1623 - 1662) chegou a escreveu: “a ciclóide é uma curva tão usual e corrente que depois da reta e da circunferência nenhuma outra curva é tão comumente encontrada. É descrita tão frequentemente diante de nossos olhos que é surpreendente que não tenha sido considerada pelos antigos...”

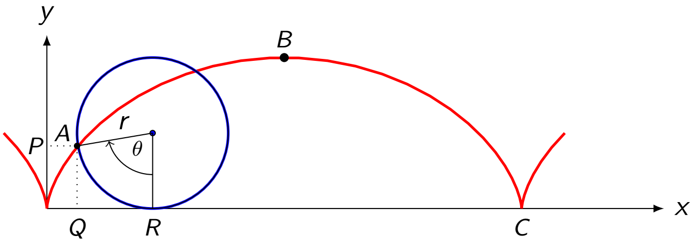
Notas

- Blaise Pascal (1623 - 1662) chegou a escreveu: “a ciclóide é uma curva tão usual e corrente que depois da reta e da circunferência nenhuma outra curva é tão comumente encontrada. É descrita tão frequentemente diante de nossos olhos que é surpreendente que não tenha sido considerada pelos antigos...”
- Nomes importantes relacionados à ciclóide: Galileu, Mersenne, Roberval, Christopher Wren, Pascal, Huygens (o problema do pêndulo), os Bernoulli‘s (o problema da braquistócrona), Newton, Leibniz, Torricelli e etc.

Pergunta. Quais as coordenadas dos pontos A, B e C?

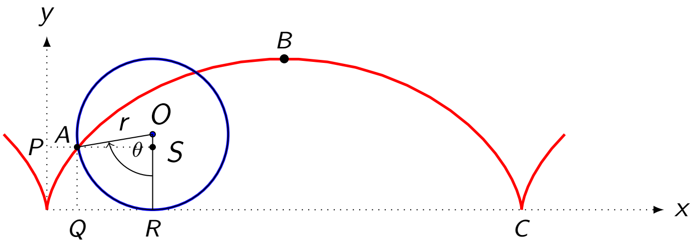


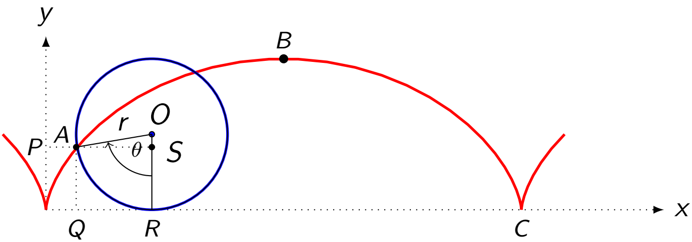
Pergunta. Quais as coordenadas dos pontos A, B e C?



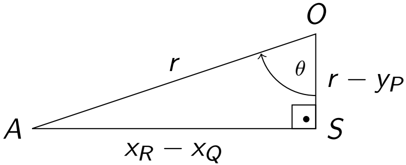
Resposta. Incialmente, vamos escrever

$$A = (x_A, y_A),\ \ P = (0, y_P),\ \ Q = (x_Q, 0),\ \ R = (x_R, 0).$$

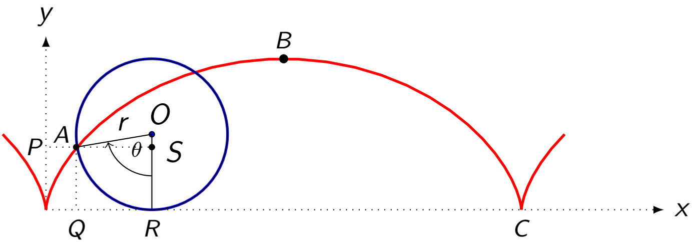

y
B
O
r
A
P
θ
S
x
Q
R
C

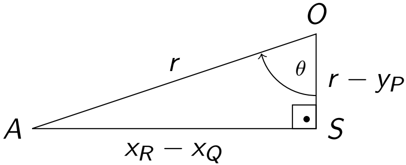


y
B
O
r
A
P
θ
S
x
Q
R
C

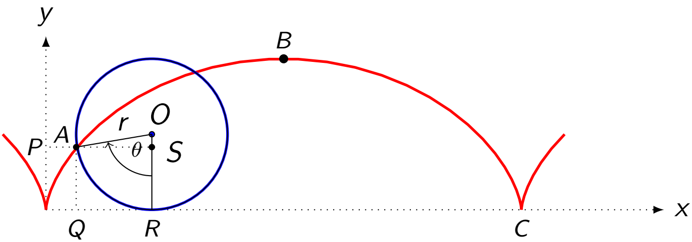


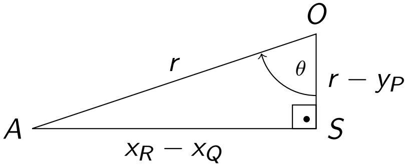
O
r
θ
r − y_P
A
S
x_R − x_Q



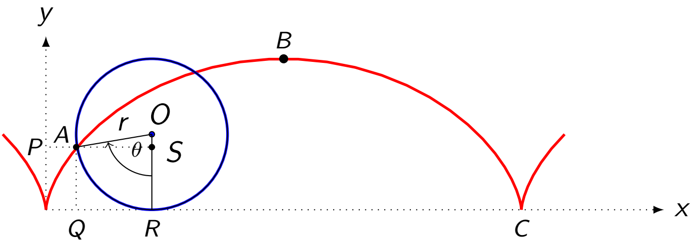


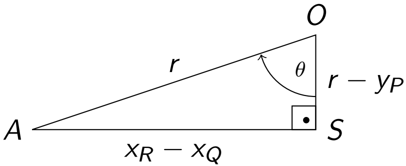
$$\text{sen}(\theta) = \frac{x_R - x_Q}{r}$$



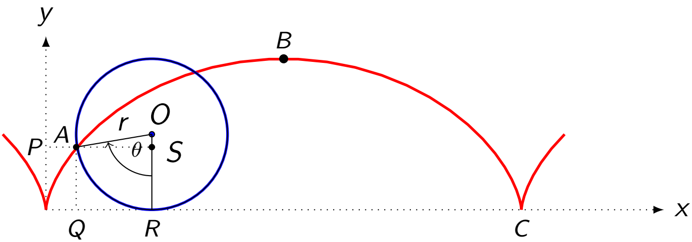


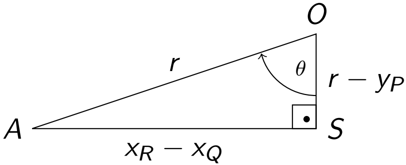
$$\mathrm{sen}(\theta) = \frac{x_R - x_Q}{r} \quad \Leftrightarrow \quad x_Q = x_R - r\,\mathrm{sen}(\theta)$$





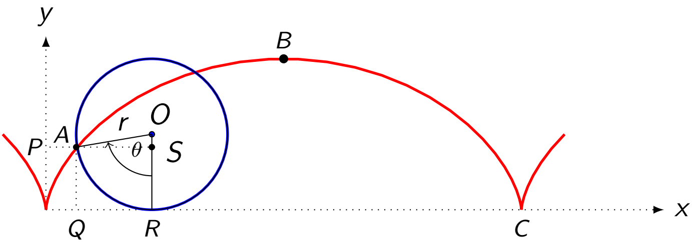
$$\text{sen}(\theta) = \frac{x_R - x_Q}{r} \quad \Leftrightarrow \quad x_Q = x_R - r\,\text{sen}(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad x_Q = r\theta - r\,\text{sen}(\theta)$$

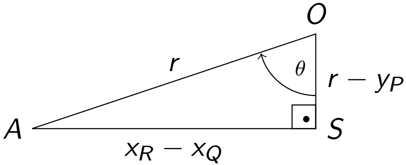




$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{x_R - x_Q}{r} \quad \Leftrightarrow \quad x_Q = x_R - r\operatorname{sen}(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad x_Q = r\theta - r\operatorname{sen}(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{r - y_P}{r}$$

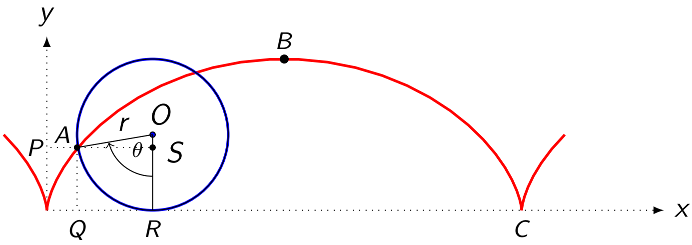




$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{x_R - x_Q}{r} \quad \Leftrightarrow \quad x_Q = x_R - r\operatorname{sen}(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad x_Q = r\theta - r\operatorname{sen}(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{r - y_P}{r} \quad \Leftrightarrow \quad y_P = r - r\cos(\theta)$$

Pergunta. Quais as coordenadas dos pontos A, B e C?



Resposta.

$$A = (r\theta - r\operatorname{sen}(\theta), r - r\cos(\theta))$$

$$B = (\pi r, 2r)$$

$$C = (2\pi r, 0).$$

Propriedade fundamental da ciclóide

A reta tangente à ciclóide em P passa pelo ponto mais alto da circunferência geratriz.

Quais as coordenadas dos pontos da ciclóide reduzida e da alongada?

Quais as coordenadas dos pontos da ciclóide reduzida e da alongada?

$$x(\theta) = r\theta - \ell \mathrm{sen}(\theta)$$

e

$$y(\theta) = r - \ell \cos(\theta).$$

O problema da braquistócrona de Johann Bernoulli

Problema. Dados dois pontos de um plano vertical A e B em níveis diferentes e não sobre a mesma vertical, determinar o caminho em que uma partícula móvel vai de A até B em tempo mínimo, assumindo que sua aceleração é apenas devida à gravidade.

O problema da braquistócrona de Johann Bernoulli

Problema. Dados dois pontos de um plano vertical A e B em níveis diferentes e não sobre a mesma vertical, determinar o caminho em que uma partícula móvel vai de A até B em tempo mínimo, assumindo que sua aceleração é apenas devida à gravidade.

Observação. *Brachistos* = menor, mais curto e *chronos* = tempo.

O problema da braquistócrona de Johann Bernoulli

Problema. Dados dois pontos de um plano vertical A e B em níveis diferentes e não sobre a mesma vertical, determinar o caminho em que uma partícula móvel vai de A até B em tempo mínimo, assumindo que sua aceleração é apenas devida à gravidade.

Observação. *Brachistos* = menor, mais curto e *chronos* = tempo.

Observação. O problema foi proposto por Johann Bernoulli em junho 1696 nas Acta Eruditorium, uma revista científica mensal alemã publicada entre 1682 e 1782, fundada em Leipzig por Otto Mencke, que foi o primeiro editor e por Gottfried Wilhelm Leibniz.

O problema da braquistócrona de Johann Bernoulli

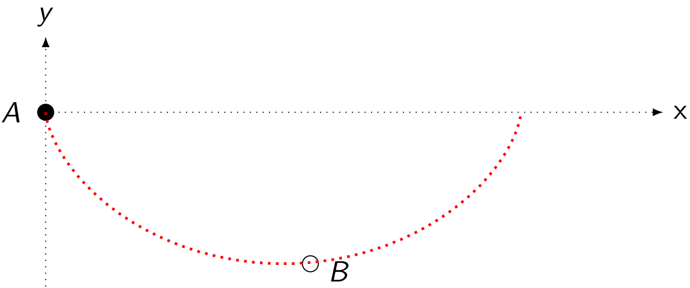
Problema. Dados dois pontos de um plano vertical A e B em níveis diferentes e não sobre a mesma vertical, determinar o caminho em que uma partícula móvel vai de A até B em tempo mínimo, assumindo que sua aceleração é apenas devida à gravidade.

A $\bullet$

$\circ$ B

O problema da braquistócrona de Johann Bernoulli

Problema. Dados dois pontos de um plano vertical A e B em níveis diferentes e não sobre a mesma vertical, determinar o caminho em que uma partícula móvel vai de A até B em tempo mínimo, assumindo que sua aceleração é apenas devida à gravidade.


y
A
x
B

Resposta. Velocidade instantânea é caracterizada como segue

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{v} = \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}}{v} dy.$$

Resposta. Velocidade instantânea é caracterizada como segue

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{v} = \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}}{v} dy.$$

A energia total é a soma da energia cinética com a energia potencial

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}v^2 - gy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{2gy}.$$

Resposta. Velocidade instantânea é caracterizada como segue

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{v} = \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}}{v} dy.$$

A energia total é a soma da energia cinética com a energia potencial

$$\frac{1}{2} m v^2 - mgy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} v^2 - gy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{2gy}.$$

Assim

$$dt = \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}}{\sqrt{2gy}} dy \quad \Rightarrow \quad t = \int \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}}{\sqrt{2gy}} dy.$$

Escrevendo $x = x(y)$ e $x' = \frac{dx}{dy}$, temos

$$t = \int \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}}{\sqrt{2gy}} dy = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{\sqrt{(x')^2 + 1}}{\sqrt{y}} dy.$$

Escrevendo $x = x(y)$ e $x' = \frac{dx}{dy}$, temos

$$t = \int \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}}{\sqrt{2gy}} dy = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{\sqrt{(x')^2 + 1}}{\sqrt{y}} dy.$$

Defina $f(x, x', y) = \dfrac{\sqrt{(x')^2 + 1}}{\sqrt{y}}$ e veja que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Escrevendo $x = x(y)$ e $x' = \frac{dx}{dy}$, temos

$$t = \int \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}}{\sqrt{2gy}} dy = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{\sqrt{(x')^2 + 1}}{\sqrt{y}} dy.$$

Defina $f(x, x', y) = \dfrac{\sqrt{(x')^2 + 1}}{\sqrt{y}}$ e veja que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{y}}$$

Escrevendo $x = x(y)$ e $x' = \frac{dx}{dy}$, temos

$$t = \int \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}}{\sqrt{2gy}} dy = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{\sqrt{(x')^2 + 1}}{\sqrt{y}} dy.$$

Defina $f(x, x', y) = \dfrac{\sqrt{(x')^2 + 1}}{\sqrt{y}}$ e veja que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{y}} \quad \text{e} \quad \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{y}} = c, \ c \in \mathbb{R}.$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{\sqrt{(x')^2+1}}{\sqrt{y}} dy.$$

e

$$\frac{x'}{\sqrt{(x')^2+1}} \frac{1}{\sqrt{y}} = c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x')^2}{(x')^2+1} \frac{1}{y} = c^2 = \frac{1}{2r}, \quad r > 0.$$

Assim

$$(x')^2 = \frac{y}{2r-y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dy} = x' = \sqrt{\frac{y}{2r-y}}$$

e

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{2r-y}} dy \quad \xRightarrow[\substack{y=r-r\cos(\theta) \\ dy=r\,\mathrm{sen}(\theta)d\theta}]{} x = r \int (1-\cos(\theta)) d\theta.$$

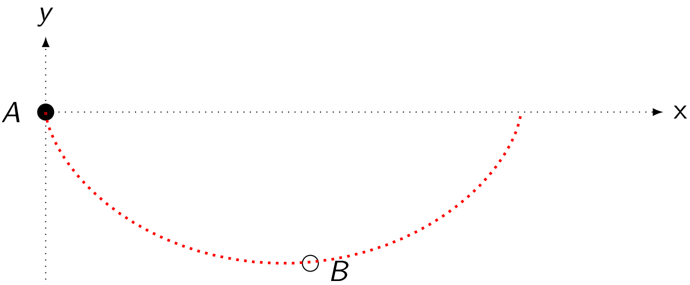
Portanto

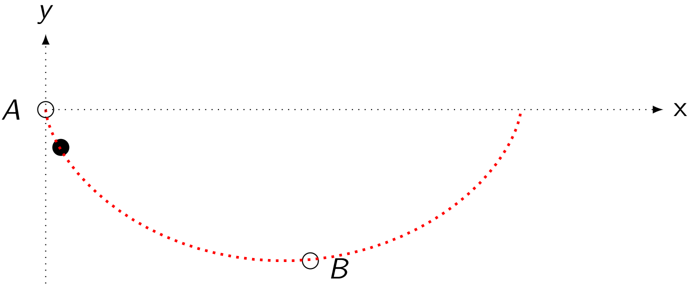
$$x = r\theta - r\mathrm{sen}(\theta)$$

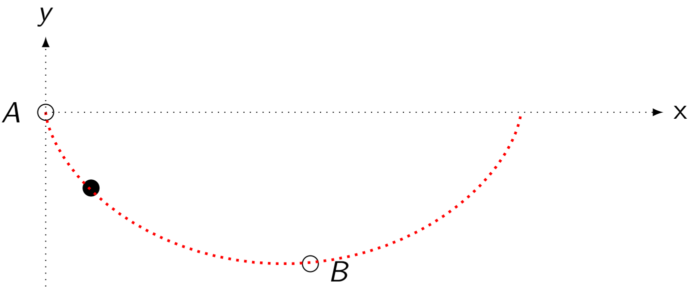
e

$$y = r - r\cos(\theta),$$

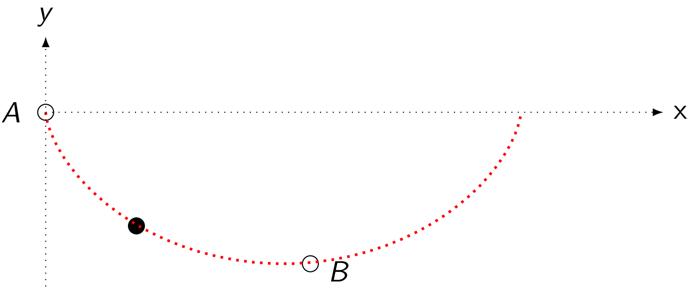
ou seja, obtemos a **braquistócrona**. $\square$

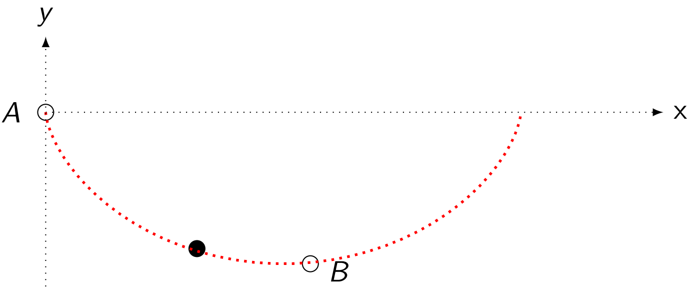

y
A
x
B

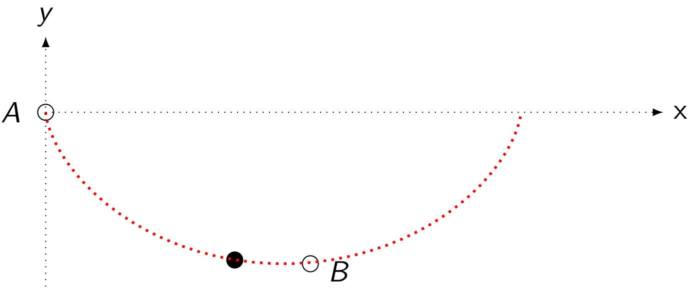

y
A
x
B



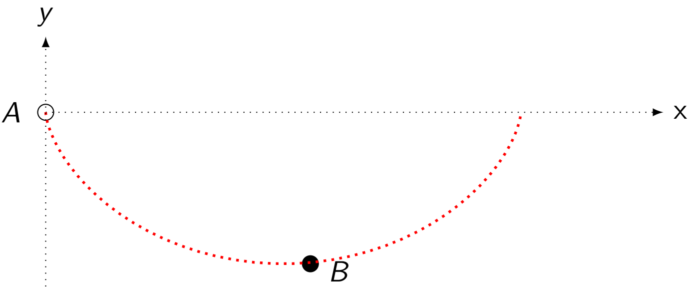
y
A
x
B


y
A
x
B


y
A
x
B



y
A
x
B


y
A
x
B

Bibliografia

- M. A. De Andrade e L. G. Ferreira Filho, Uma abordagem geométrica ao problema da braquistócrona, Revista Brasileira de Ensino de Fśica, 37, 2, 2309 (2015), 1–6.
- C. Moreno, Tróia: o romance de uma guerra, Porto Alegre, L&PM, 2004.
- J. Stewart, Cálculo 2, volume 2, 8ª edição, editora CENGAGE, 2013.
- http://algumascurvasplanas.blogspot.com/2014/12/a-cicloide.html

Obrigado!